DEPARTAMENTO ACADEMICO DE CIENCIAS

CURSO:

FISICA

AUTOR:

Prof. NOLBERTO J. LIMAY ARENAS

UPAO

UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

¿POR QUÉ *TU CARRERA* NECESITA VECTORES?

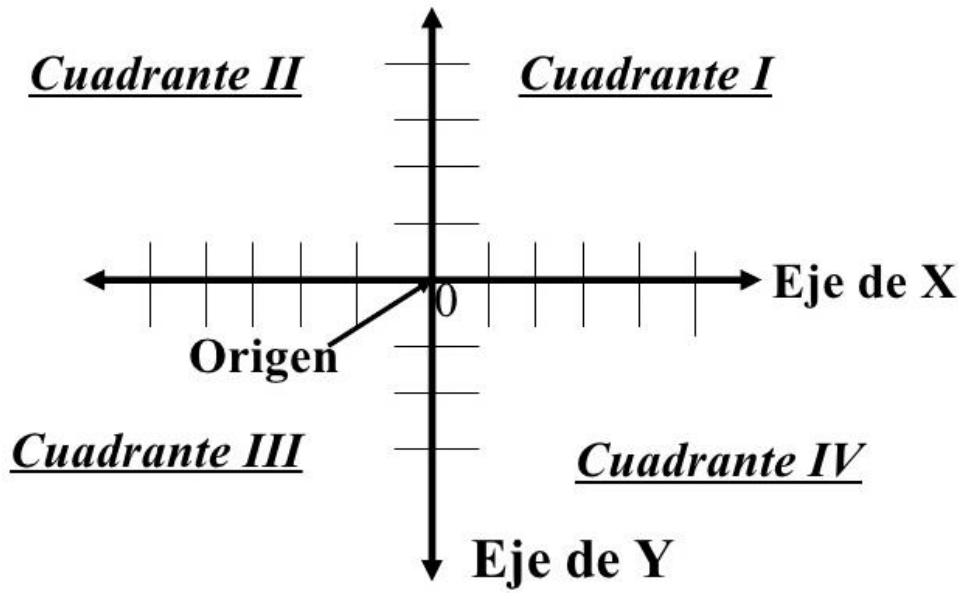
Especialidad	Aplicación de Vectores	Ejemplo concreto
Ing. Civil	Fuerzas en estructuras y suelos	Análisis de vigas, diseño antisísmico
Ing. Industrial	Dinámica de máquinas y flujos	Torque en transmisiones, ergonomía
Ing. Electrónica	Campos eléctrico y magnético	Ecuaciones de Maxwell, antenas, fasores
Electrónica & Mecatrónica	Cinemática y dinámica de robots	Control de brazos, drones, IMU
Ing. de Sistemas	Gráficos 3D y bases de datos	Transformaciones geométricas, embeddings
Ing. Sistemas e IA	Redes neuronales y ML	Gradientes, similitud coseno, PCA

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

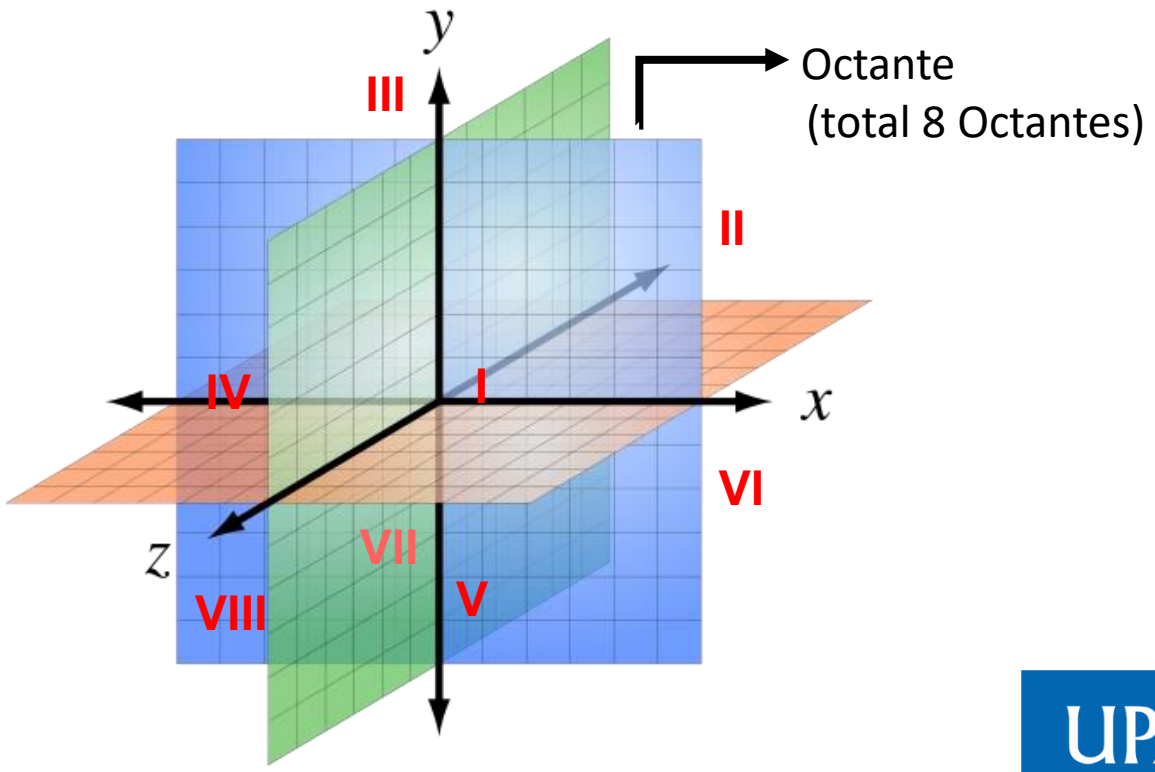
1. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Usa ejes perpendiculares entre sí. Es el sistema más utilizado en ingeniería por su simplicidad algebraica.

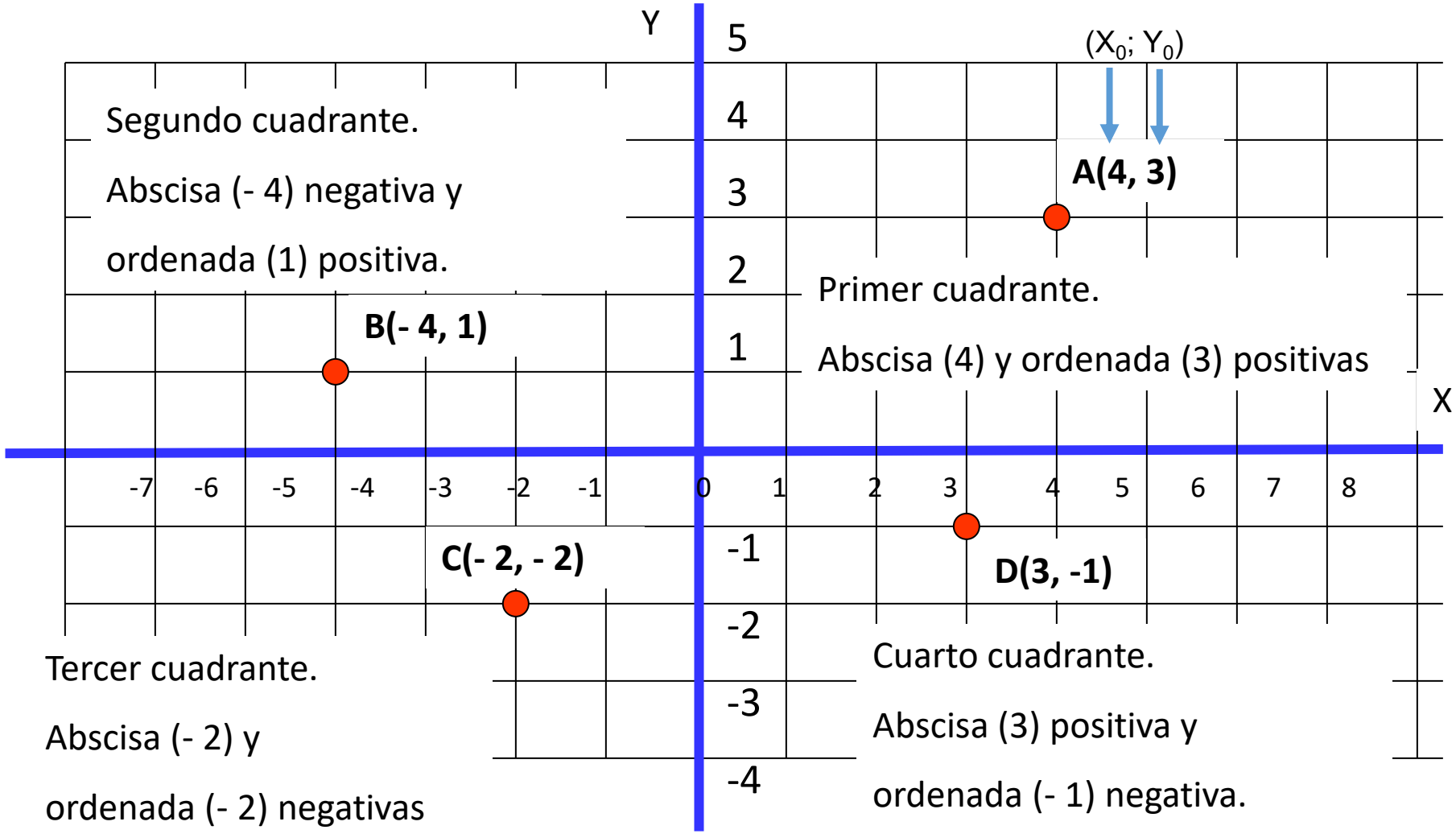
1.1 Plano (2D)



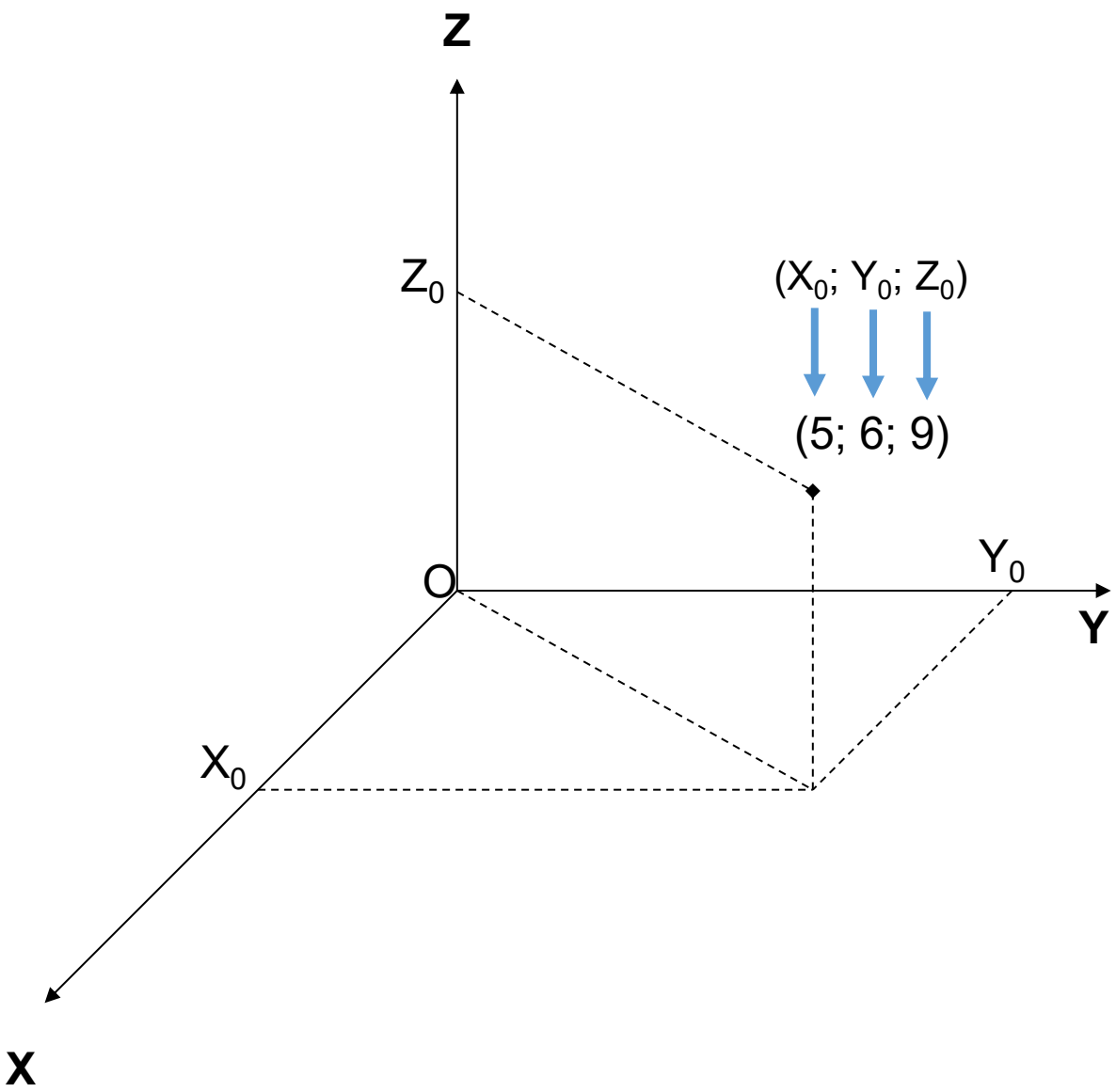
1.2 Espacio (3D)

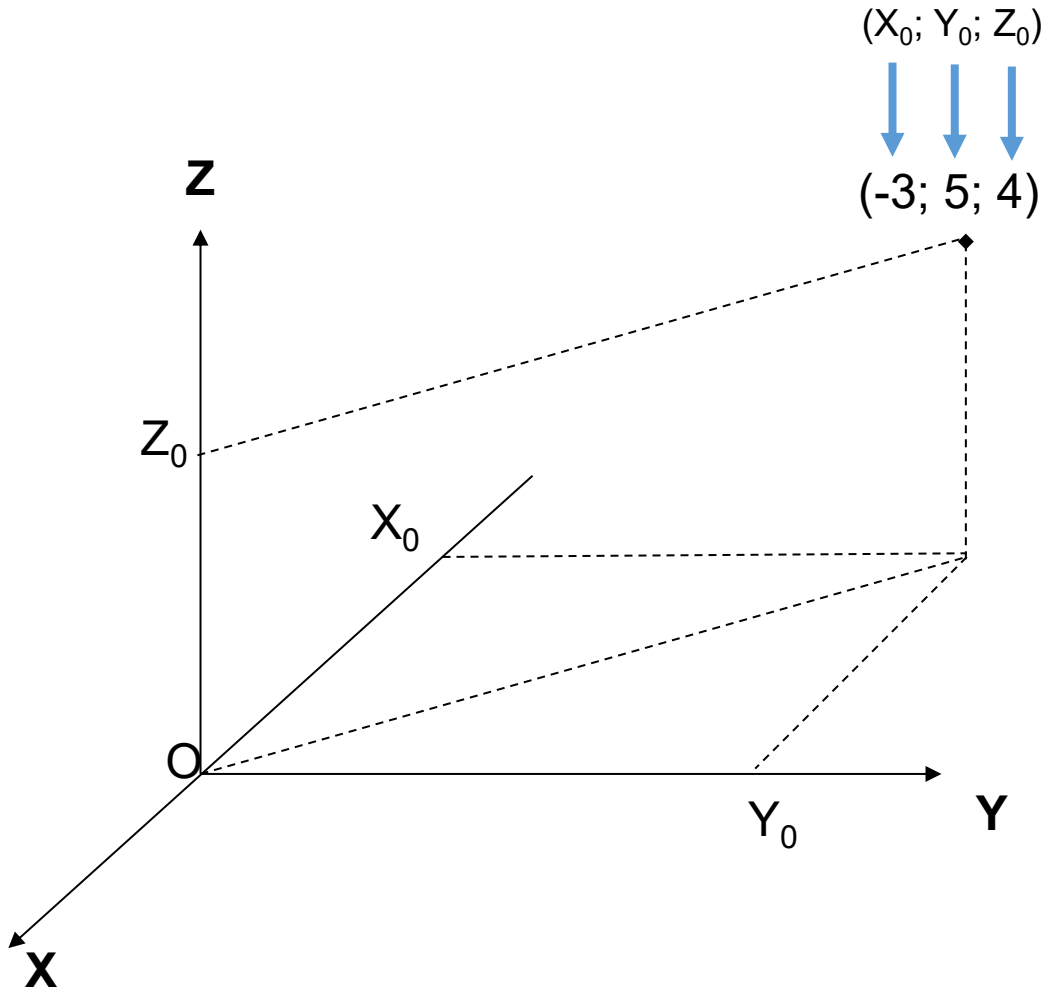


Ejemplo 1: Ubicación de un punto en el plano cartesiano.

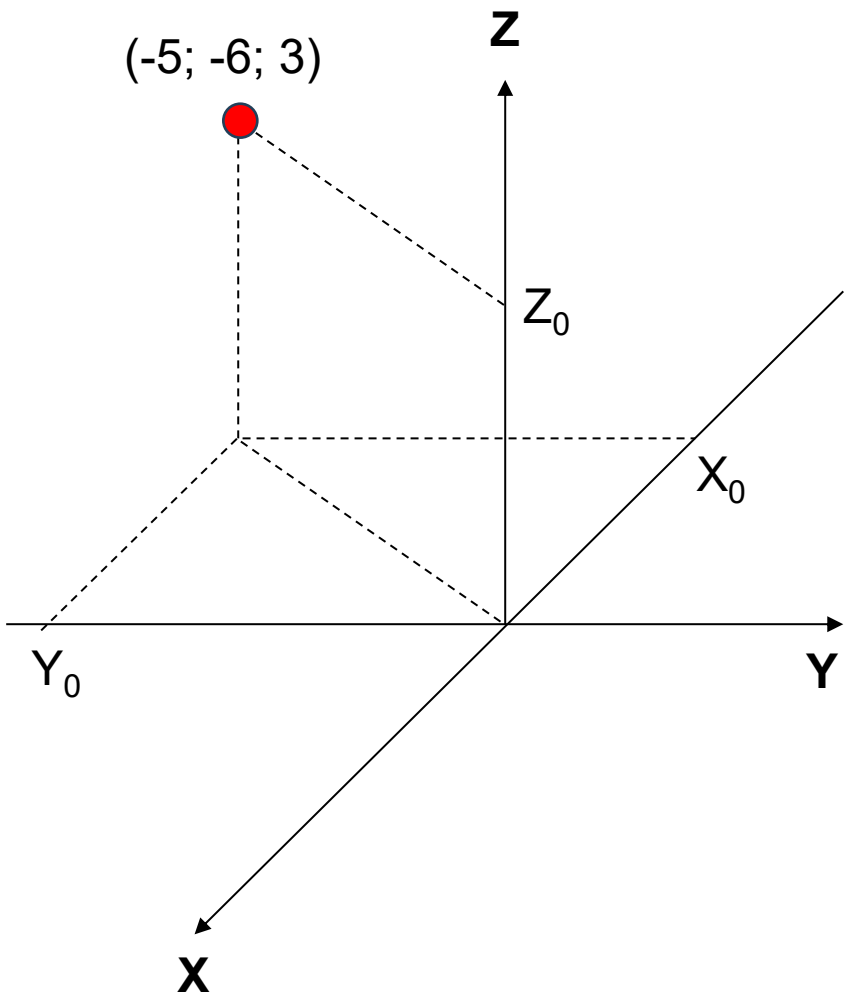


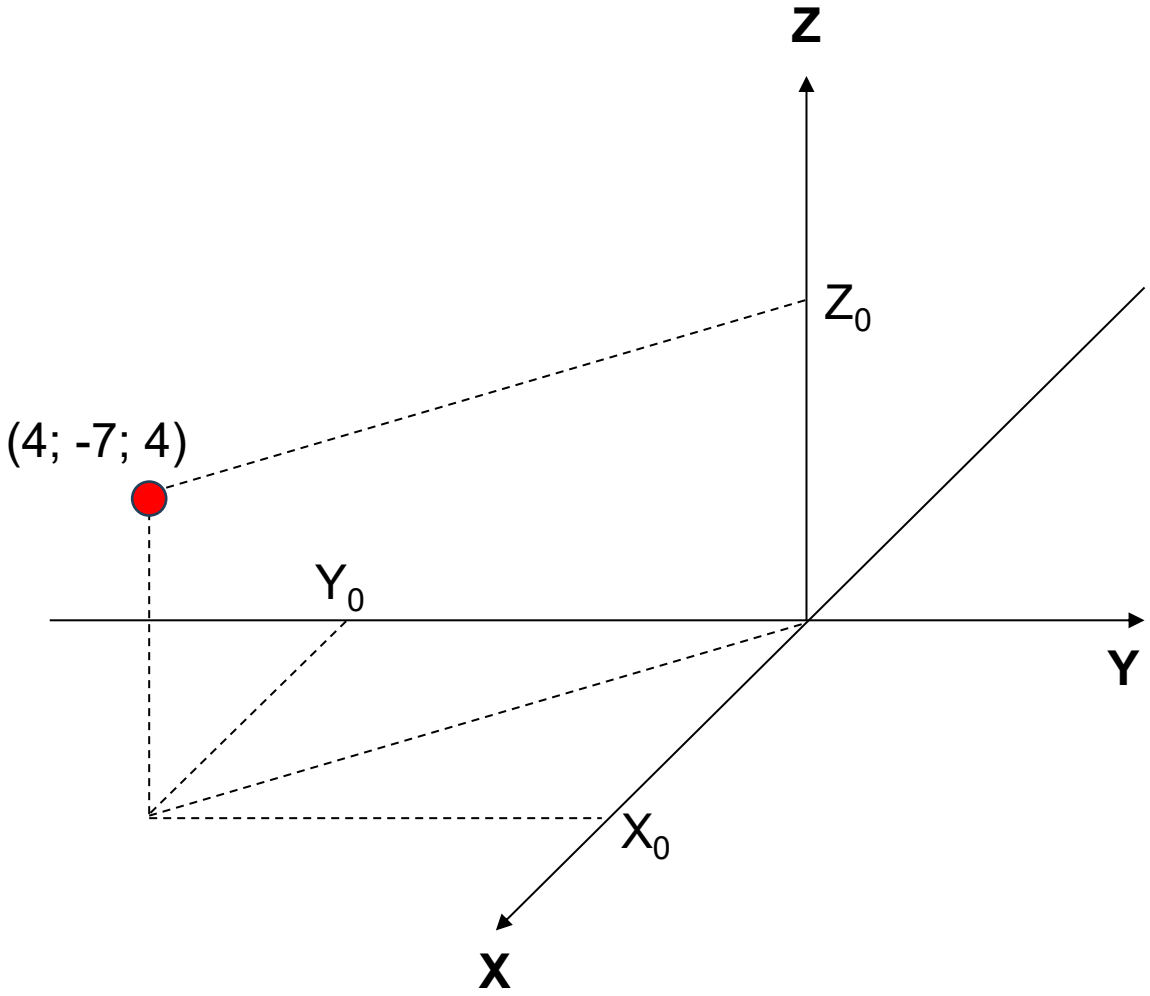
Ejemplo 2: Ubicación de un punto en el espacio





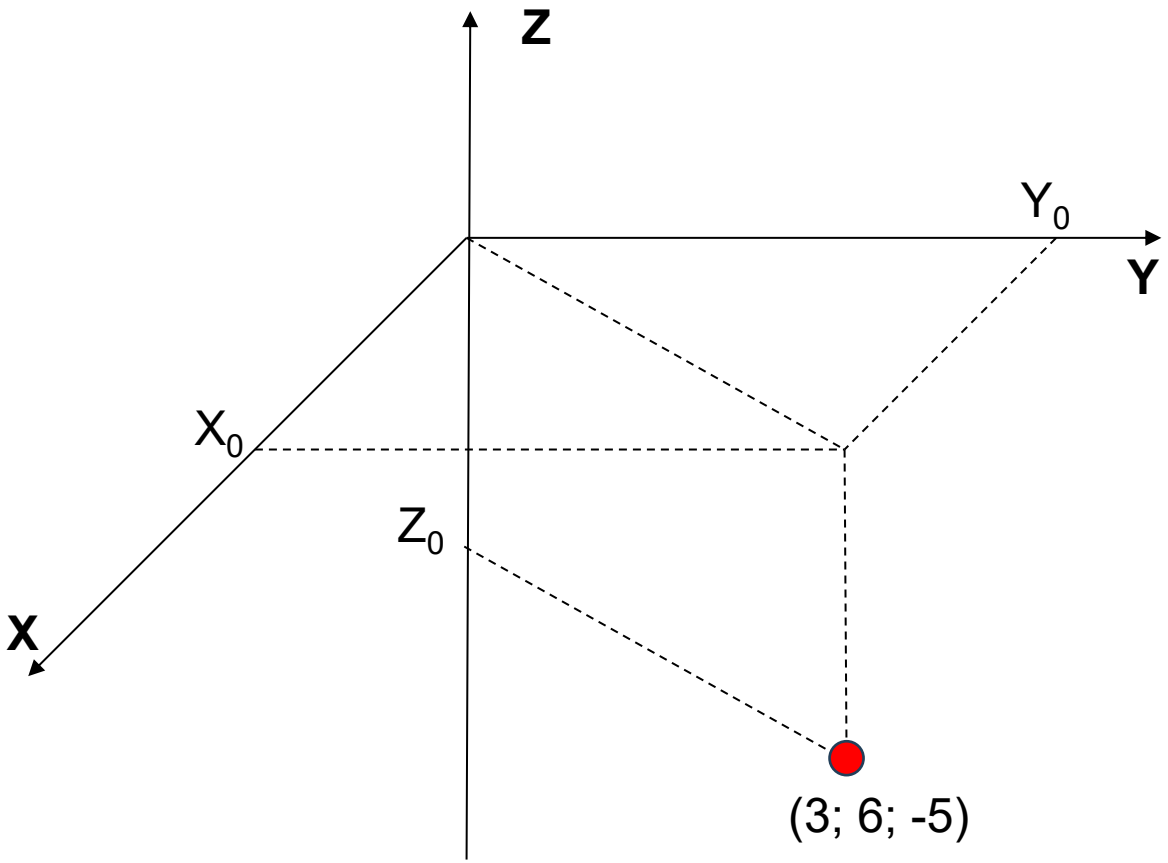
Ejemplo 2: Ubicación de un punto en el espacio.

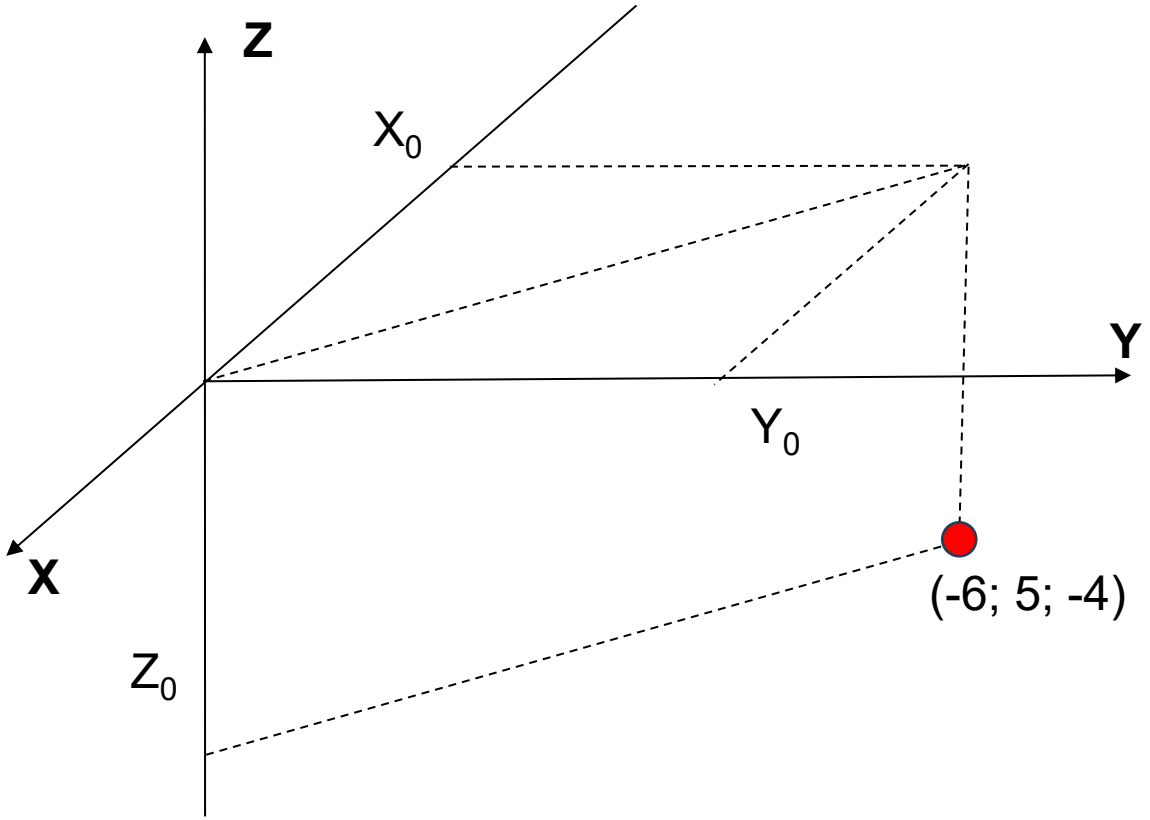




UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

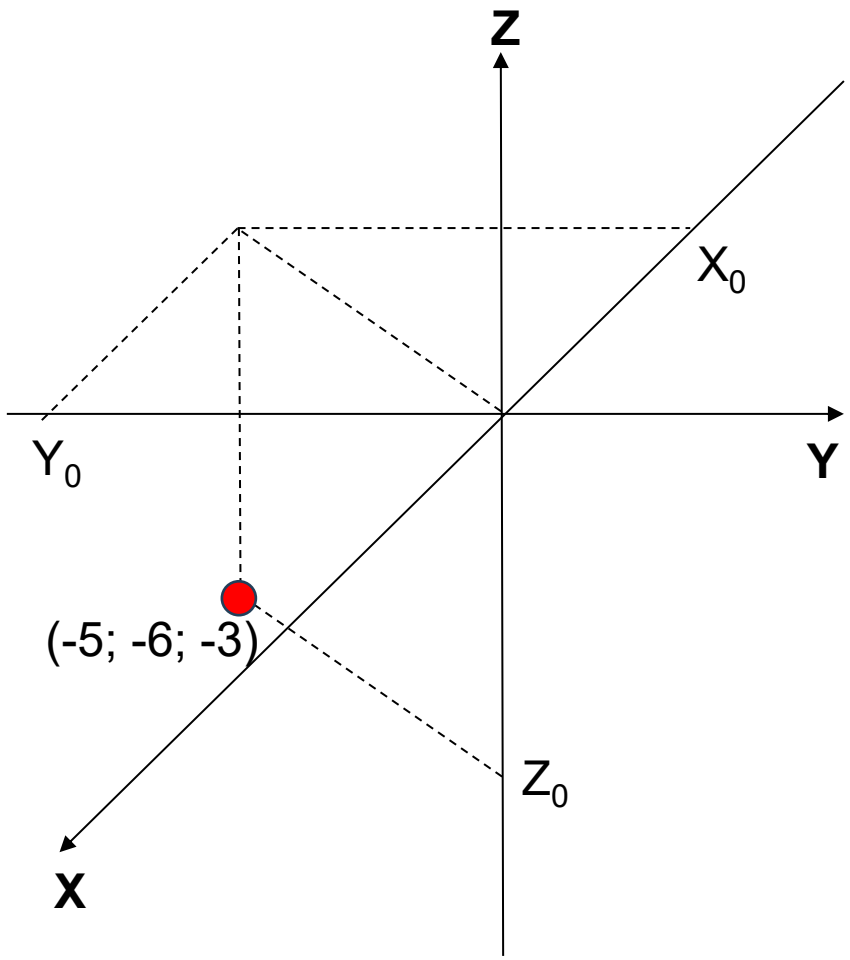
Ejemplo 2: Ubicación de un punto en el espacio.

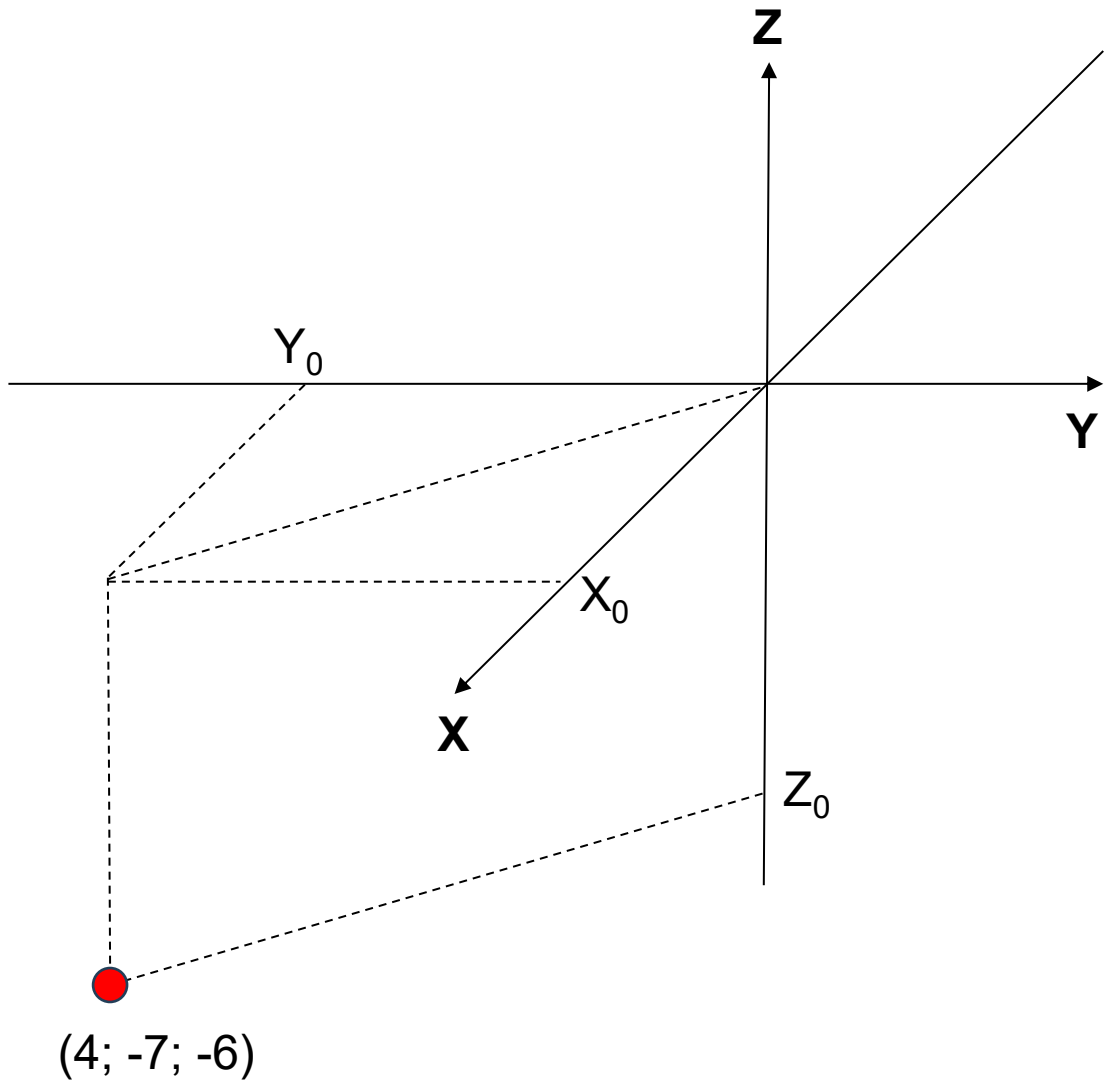




UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

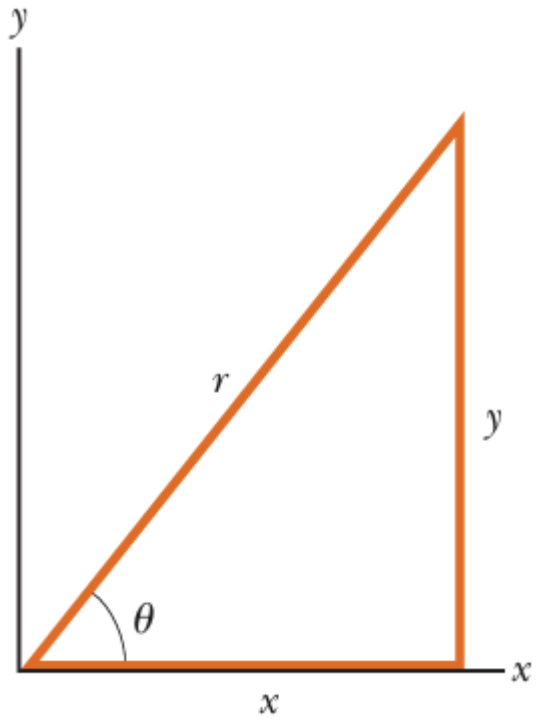
Ejemplo 2: Ubicación de un punto en el espacio.





2. Trigonometría

Considere el triángulo rectángulo donde el lado “y” es opuesto al ángulo θ, el lado “x” es adyacente al ángulo θ y el lado “r” es la hipotenusa del triángulo. Las funciones trigonométricas básicas definidas en el triángulo mencionado son conocidas como las funciones seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan) son:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{y}{x}$$

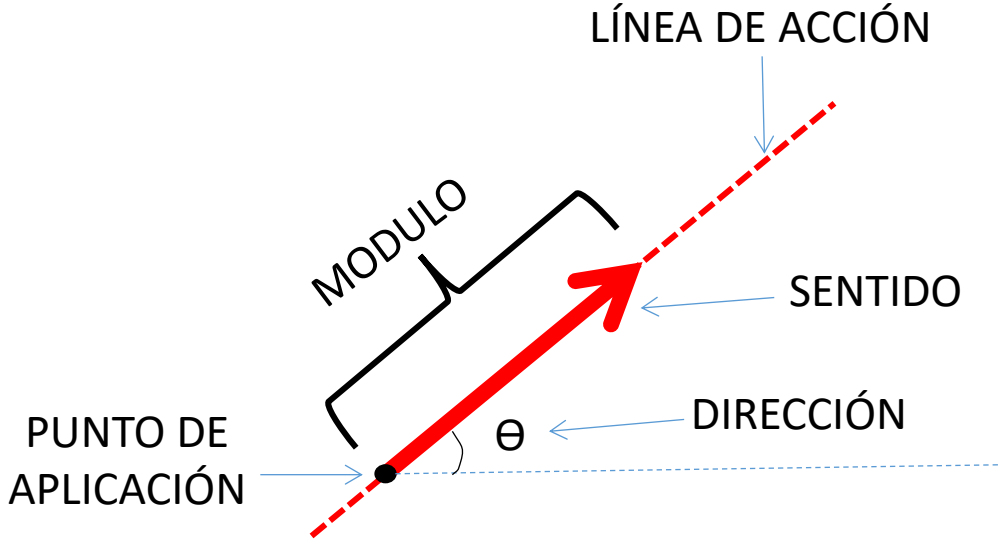
Teorema de Pitágoras

$$r^2 = x^2 + y^2$$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

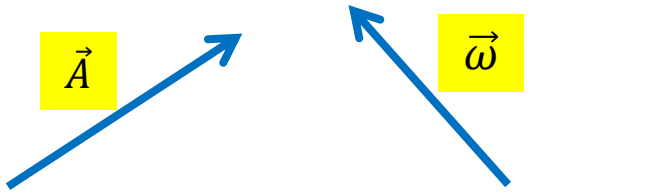
3. VECTOR

Se define como un segmento orientado en el espacio y posee 5 elementos definidos



3.1. NOTACIÓN DEL VECTOR

Esta representación indica modulo, dirección y sentido



Se lee: vector $\vec{A}$

Se lee: vector $\vec{\omega}$

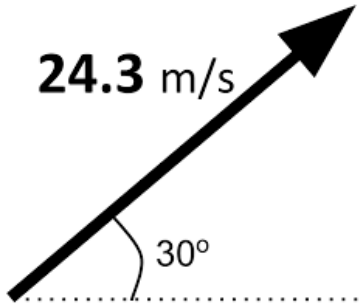
3.2. NOTACIÓN DEL MÓDULO DE UN VECTOR

Modulos : $|\vec{A}|$= A

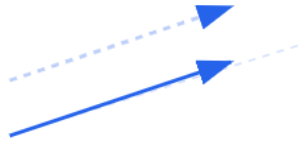
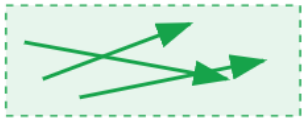
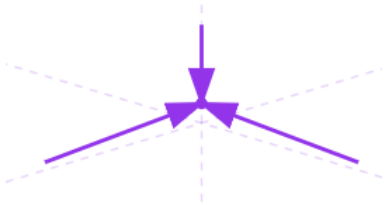
$|\vec{a}|$= a

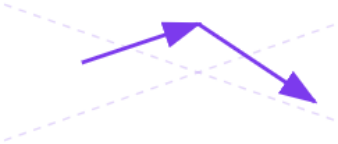
Magnitud = Modulo

Ejemplo:



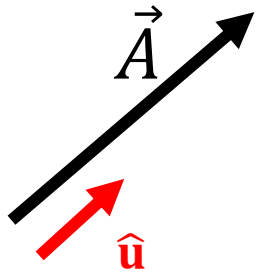
3.3. TIPOS DE VECTORES

Tipo de Vector	Características	Ilustración
Vector Libre	• Puede trasladarse a cualquier punto del espacio • Solo importa su magnitud y dirección • Ejemplo: vector velocidad, vector desplazamiento	
Vector Deslizante	• Se desliza sobre su línea de acción • Dirección y sentido constantes • Ejemplo: fuerza sobre una superficie	
Vectores Coplanares	• Están contenidos en el mismo plano • Pueden tener diferentes direcciones y magnitudes • Ejemplo: fuerzas actuando sobre una superficie plana	
Vectores Concurrentes	• Sus líneas de acción se intersectan en un punto • Pueden tener diferentes magnitudes • Ejemplo: fuerzas convergentes en un punto	

Tipo de Vector	Características	Ilustración
Vectores Paralelos	• Tienen direcciones paralelas • Pueden tener igual o diferente sentido • Sus líneas de acción no coinciden • Ejemplo: fuerzas paralelas en una estructura	
Vectores Opuestos	• Misma línea de acción y magnitud • Sentidos contrarios • Ejemplo: par de fuerzas opuestas	
Vectores Consecutivos	• El punto final de uno coincide con el inicial del siguiente • Forman una trayectoria continua • Ejemplo: desplazamientos sucesivos	

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

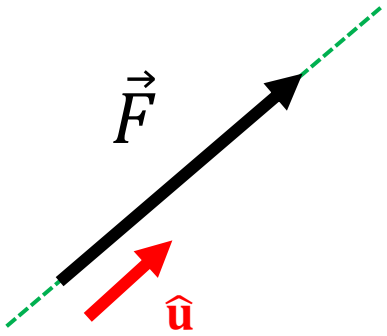
4. VECTOR UNITARIO ($\hat{u}$)



- Su función es indicar una dirección.
- Un **vector unitario** tiene módulo exactamente igual a 1.
- No tiene unidad de medida

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|A|}$$

NOTA: Cualquier vector puede ser expresado como el producto de su modulo por un vector unitario.



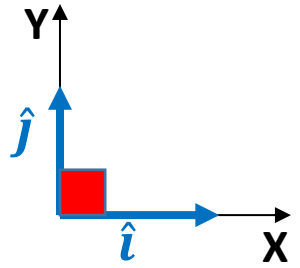
Si deseamos determinar la fuerza, utilizamos lo siguiente:

$$\vec{F} = F\hat{u}$$

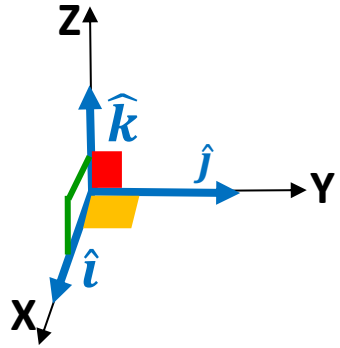
Se tiene que determinar

4.1. VECTORES UNITARIOS FUNDAMENTALES

EN EL PLANO



EN EL ESPACIO



Los vectores unitarios fundamentales especifican la dirección de los ejes coordenados positivos.

El objetivo es escribir vectores en el plano y espacio en función de vectores unitarios.

Ejemplos: Representación en forma vectorial o cartesiana.

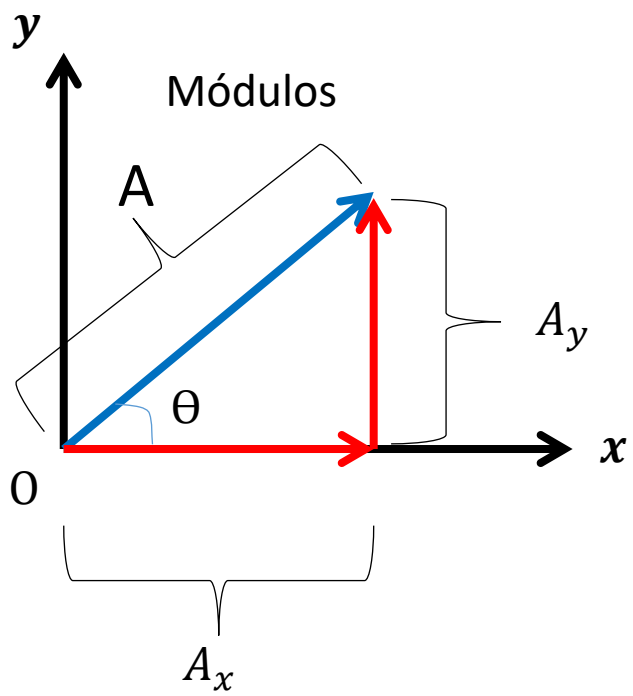
$$\vec{p} = 50\hat{\imath} - 100\hat{\jmath}$$

$$\vec{q} = -300\hat{\imath} + 500\hat{\jmath} + 350\hat{k}$$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

5. COMPONENTES DE UN VECTOR

5.1. EN EL PLANO



1° Calculo del modulo de componentes del vector $\vec{A}$.

$$A_x = A\,\text{Cos}\theta \;;\; A_y = A\,\text{Sen}\theta$$

2° Vector en el plano cartesiano en función de los vectores unitarios fundamentales:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

3° Modulo del vector $\vec{A}$

$$A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

4° Dirección del vector $\vec{A}$.

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \rightarrow \theta = arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

EJEMPLO 5: Sobre la armella roscada de la figura actúan dos fuerzas como se muestran en la figura. (a)Determine la magnitud de las componentes de las fuerzas mostradas en la figura y (b) Escriba las fuerzas en su forma vectorial o cartesiana.

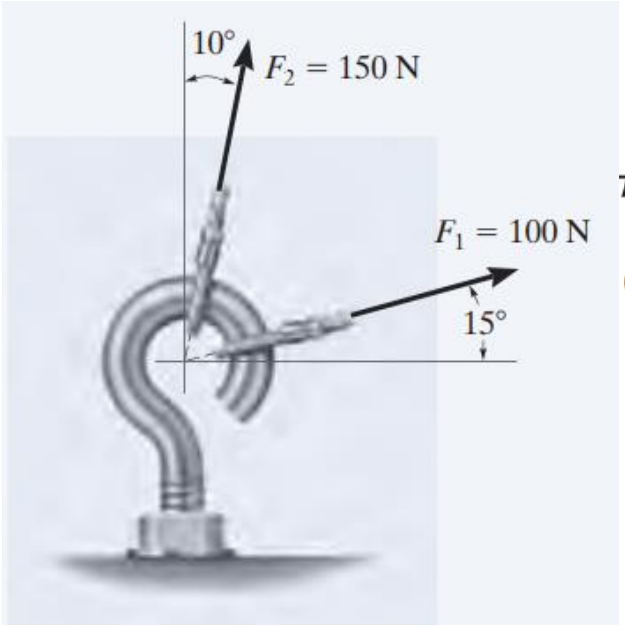


Figura 1

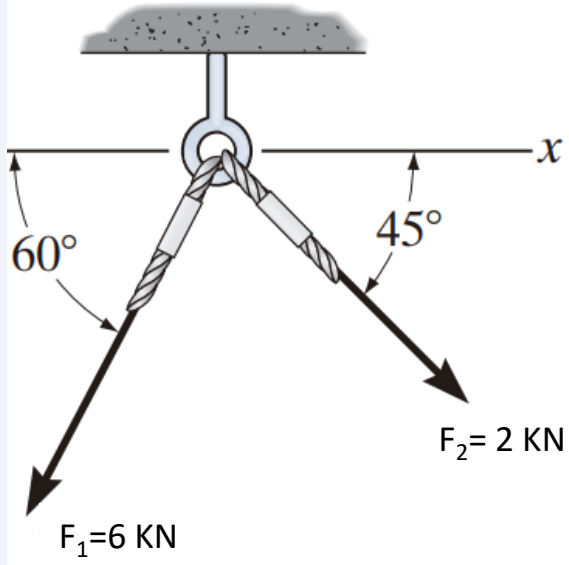


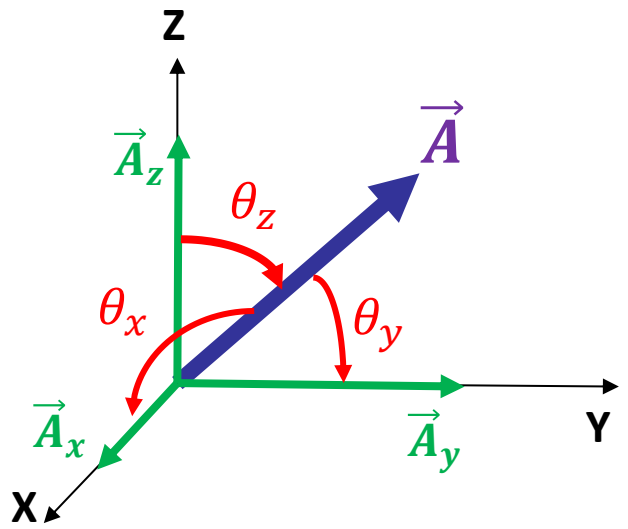
Figura 2

EJEMPLO 6: Graficar los vectores, calcular su modulo y determinar su dirección para los siguientes vectores mostrados en la tabla.

VECTOR
$\vec{A} = (10, 15)\text{m}$
$\vec{B} = -5\hat{i} + 12\hat{j}, \text{N}$
$\vec{C} = -7\hat{i} + 20\hat{j}, \text{N/C}$
$\vec{D} = (-3, 8)\text{m/s}$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

5.2. EN EL ESPACIO



$\theta_x = \alpha; \theta_y = \beta; \theta_z = \gamma$

Representan los ángulos directores

1° Vectores componentes

$$\vec{A}_x = A_x\hat{i} \quad \vec{A}_y = A_y\hat{j} \quad \vec{A}_z = A_z\hat{k}$$

2° Cosenos directores:

$$\cos\theta_x = \frac{A_x}{A} \quad \cos\theta_y = \frac{A_y}{A} \quad \cos\theta_z = \frac{A_z}{A}$$

3° Módulo de los vectores componentes

$$A_x = A\cos\theta_x \qquad A_y = A\cos\theta_y \qquad A_z = A\cos\theta_z$$

4° Vector en el espacio.

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

5° Modulo del vector $\vec{A}$

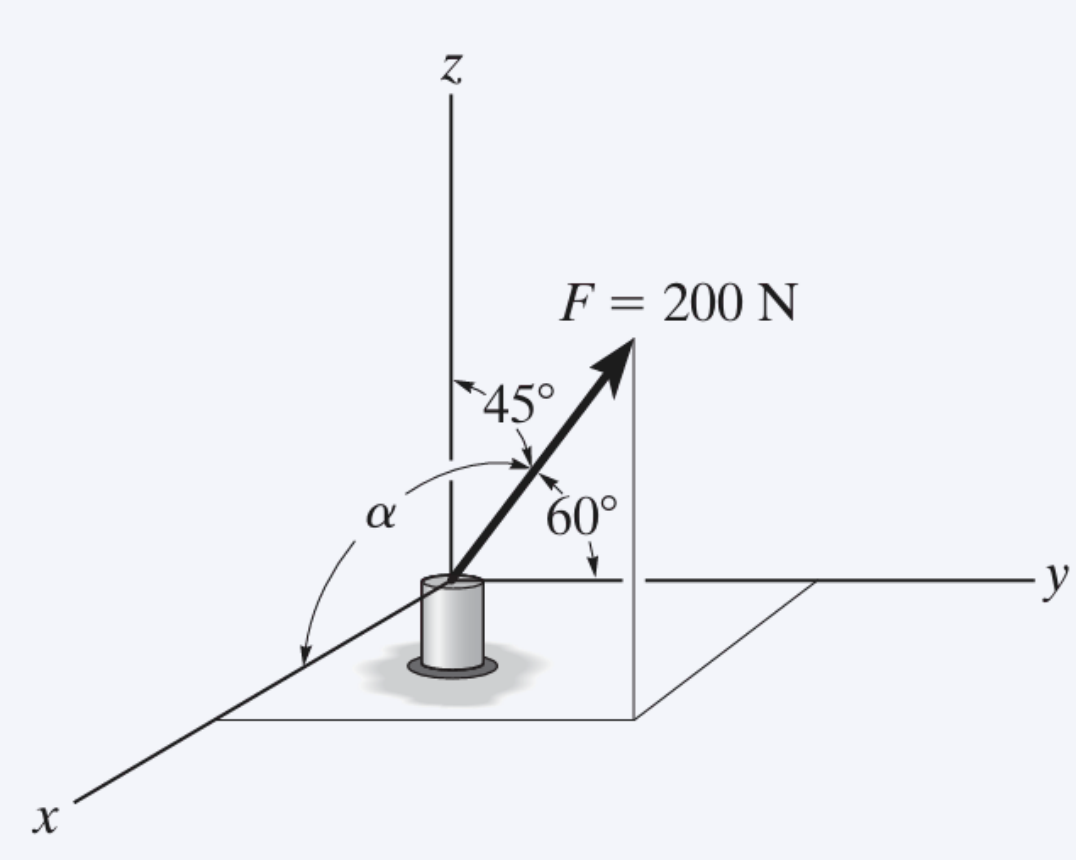
$$A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

Identidad:

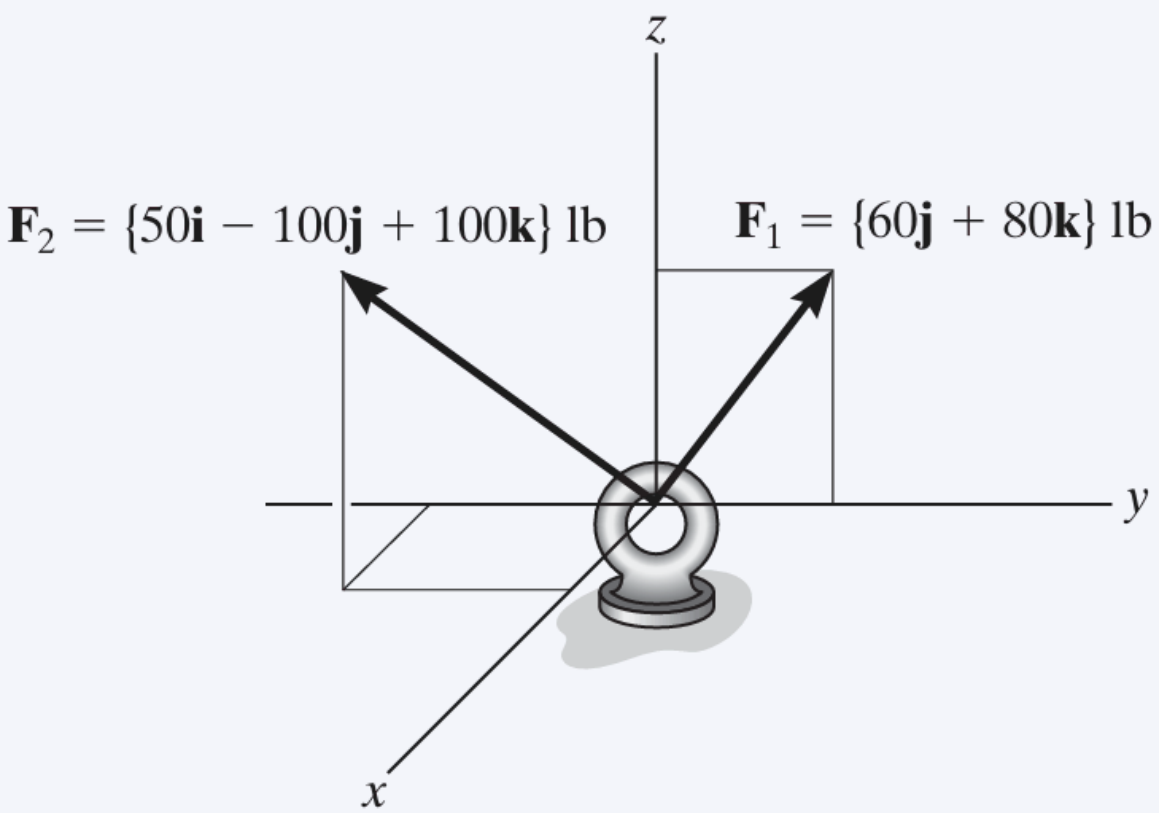
$$(\cos\theta_x)^2 + (\cos\theta_y)^2 + (\cos\theta_z)^2 = 1$$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

EJEMPLO 7: Exprese la fuerza F mostrada en la figura en su escritura vectorial o como un vector cartesiano.

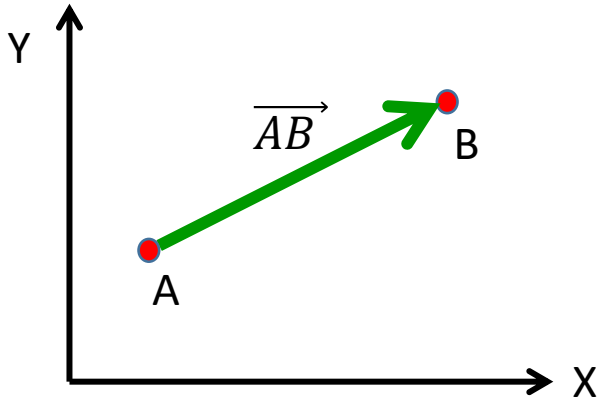


EJEMPLO 8: Determine la magnitud y los ángulos directores de las fuerzas mostradas en la figura.



UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

6. REPRESENTACION CARTESIANA DE UN VECTOR



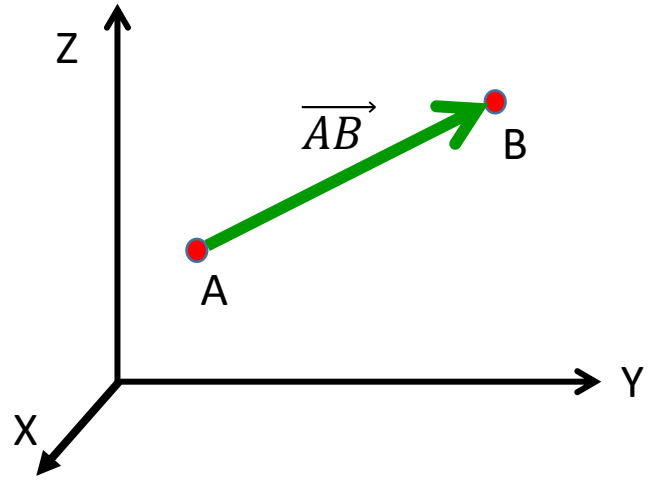
Sean los puntos A y B cuyas coordenas son:

$$A= (x_1;\ y_1) \quad y \quad B= (x_2;\ y_2)$$

Entonces el vector $\overrightarrow{AB}$ será:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = B - A = (x_2;\ y_2) - (x_1;\ y_1)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath}$$



Sean los puntos A y B cuyas coordenas son:

$$A= (x_1;\ y_1; z_1) \quad y \quad B= (x_2;\ y_2; z_2)$$

Entonces el vector $\overrightarrow{AB}$: será calculado restando cabeza menos cola del vector.

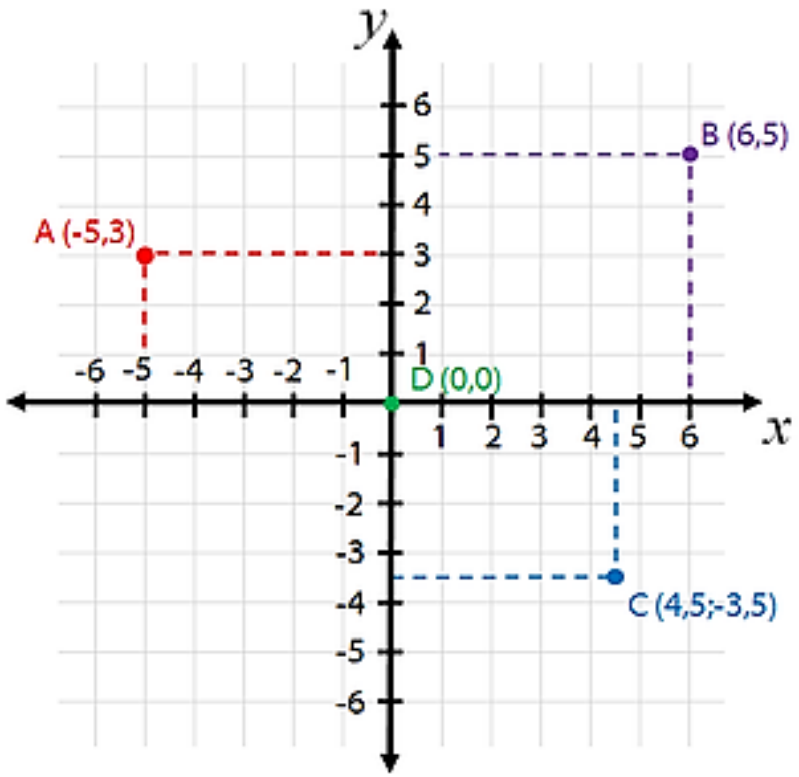
$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = B - A = (x_2;\ y_2; z_2) - (x_1;\ y_1; z_1)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\ ;\ z_2 - z_1)$$

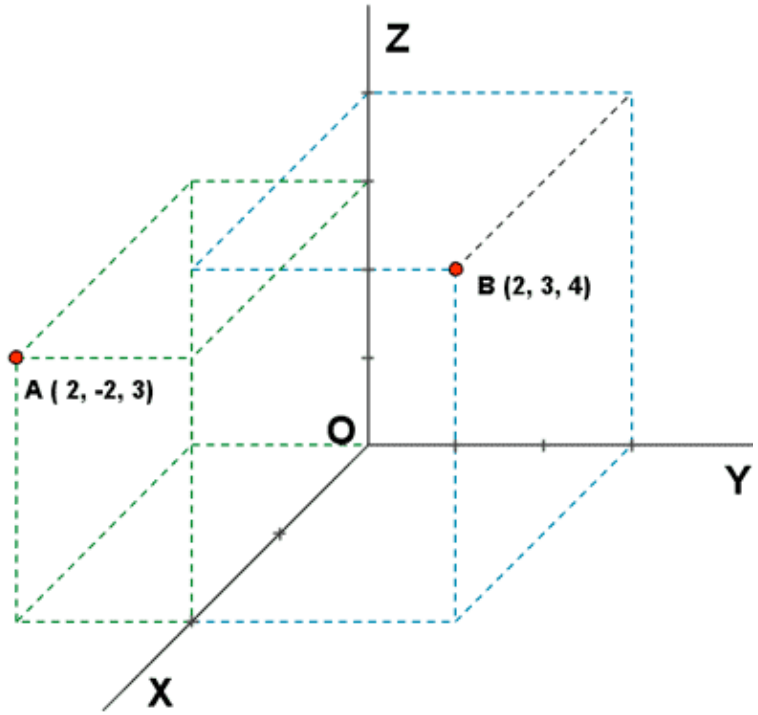
$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

Ejemplo 9: Dado los puntos ubicados en el plano cartesiano. Determine los siguientes vectores: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$

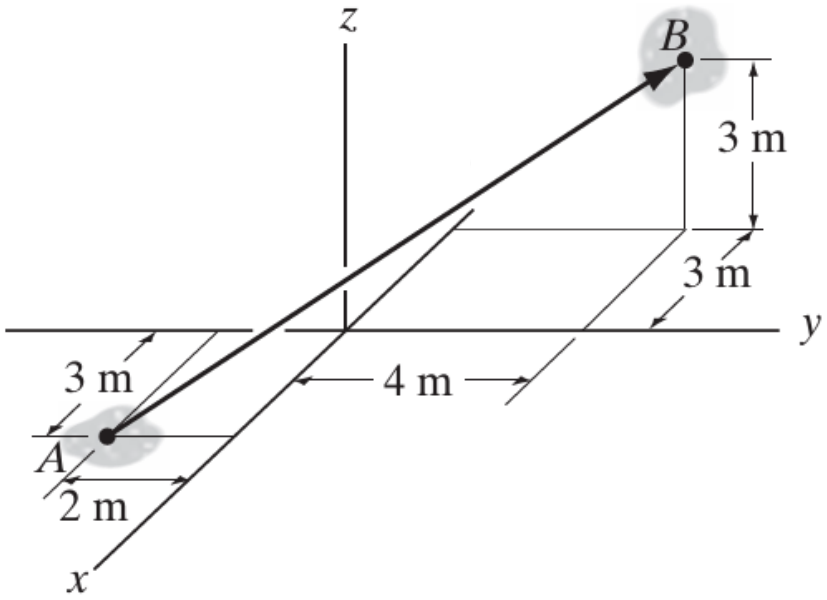


Ejemplo 10: Dados los siguientes puntos en la figura. Determine el vector $\overrightarrow{AB}$



UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

DESAFÍO 1: Determina el vector $\overrightarrow{AB}$ y su vector unitario

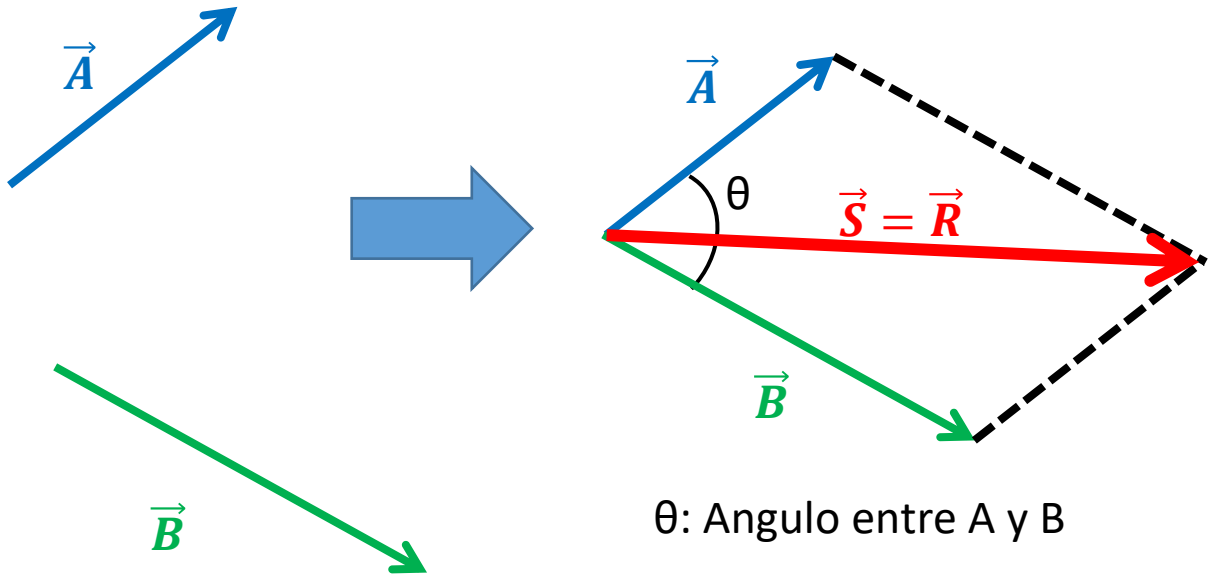


4. OPERACIONES CON VECTORES

4.1. SUMA DE DOS VECTORES

Para sumar vectores existe el método grafico y analítico.

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO, es un método grafico y se utiliza para sumar solo 2 vectores concurrentes



θ: Angulo entre A y B

Calculo del modulo de la suma:

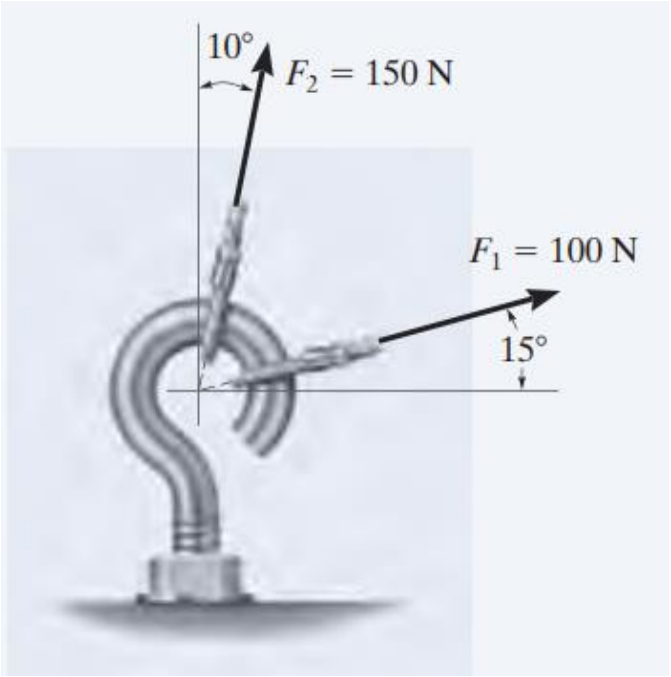
$$|\vec{S}| = |\vec{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

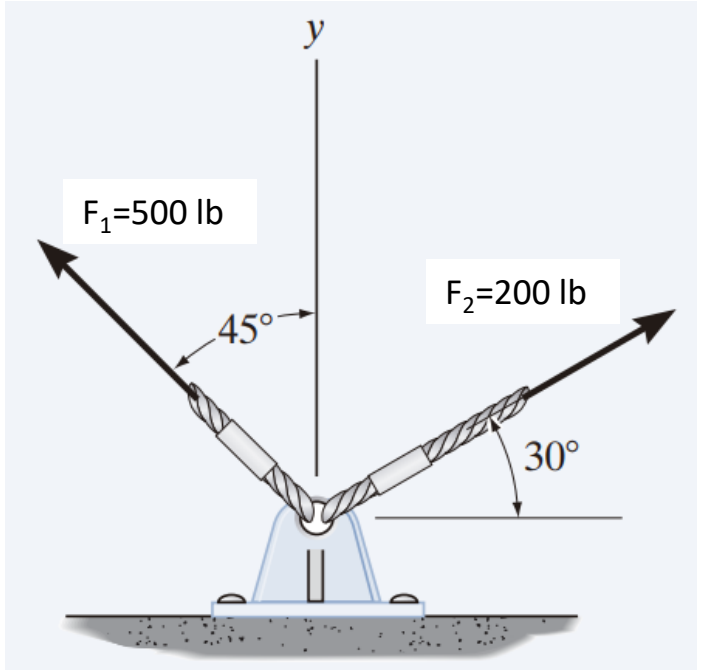
En la suma de vectores se cumple la propiedad conmutativa: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

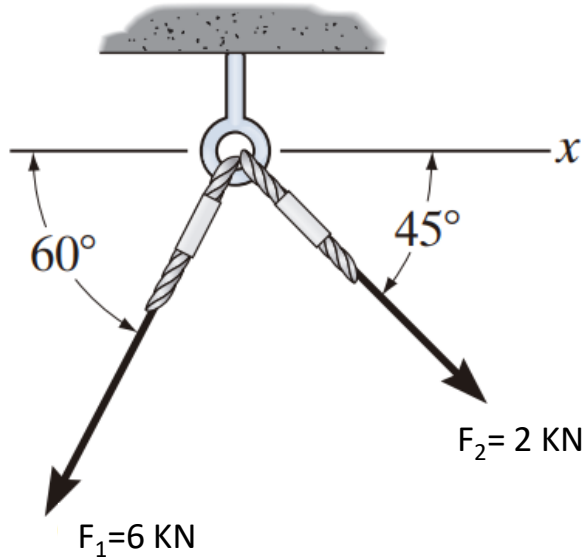
Nota: A la suma también se le dice resultante.

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

EJEMPLO 11: Determine la magnitud de la resultante usando el método del paralelogramo.



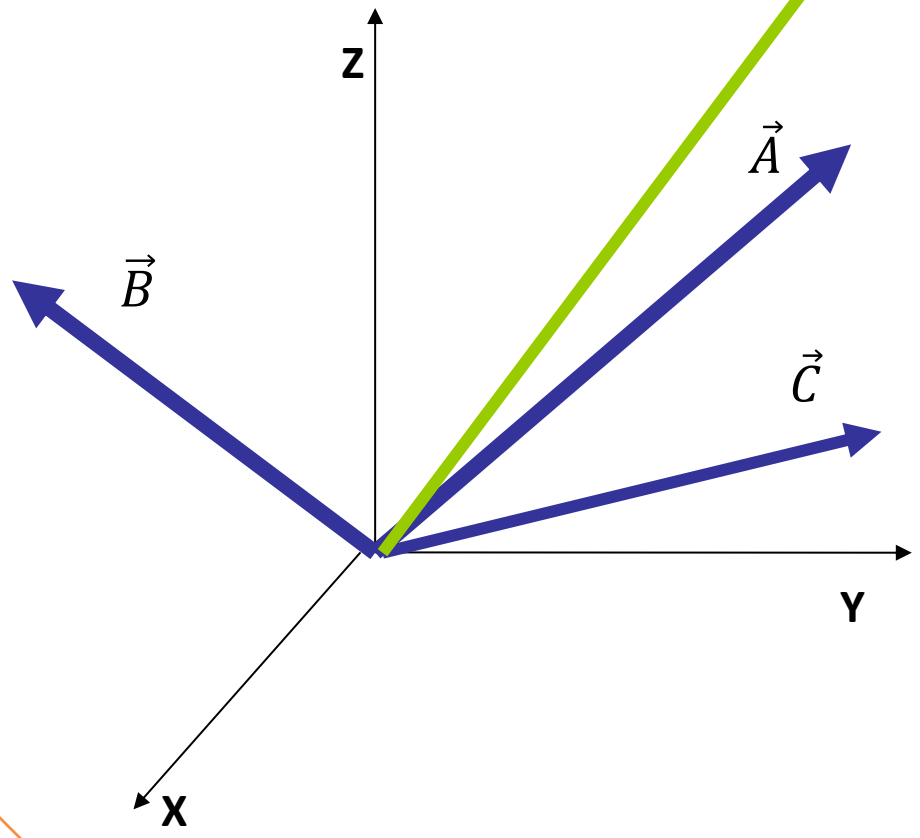




B) METODO ANALITICO: Se usa para sumar mas de dos vectores

NOTA: Se tendrá que descomponer cada vector para luego realizar la suma.

$$\vec{S} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \ldots$$



Descomponer y expresar los vectores en su forma vectorial

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{\mathbf{C}} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

Componentes de la suma o resultante

Resultante o suma en “x” $S_x = A_x + B_x + C_x + \ldots$

Resultante o suma en “y” $S_y = A_y + B_y + C_y + \ldots$

Resultante o suma en “z” $S_z = A_z + B_z + C_z + \ldots$

$$\vec{S} = S_x\hat{i} + S_y\hat{j} + S_z\hat{k}$$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

DESCOMPOSICION DE VECTORES

EJEMPLO 12: Sean los vectores como se muestra en la figura. Hallar la resultante, modulo y su dirección.

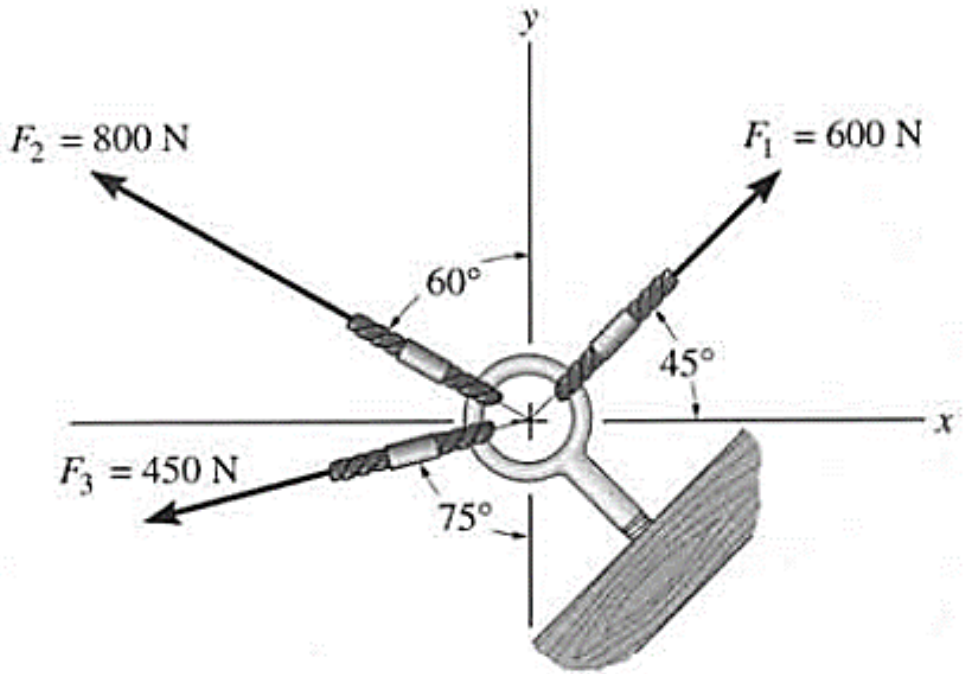


Figura 1

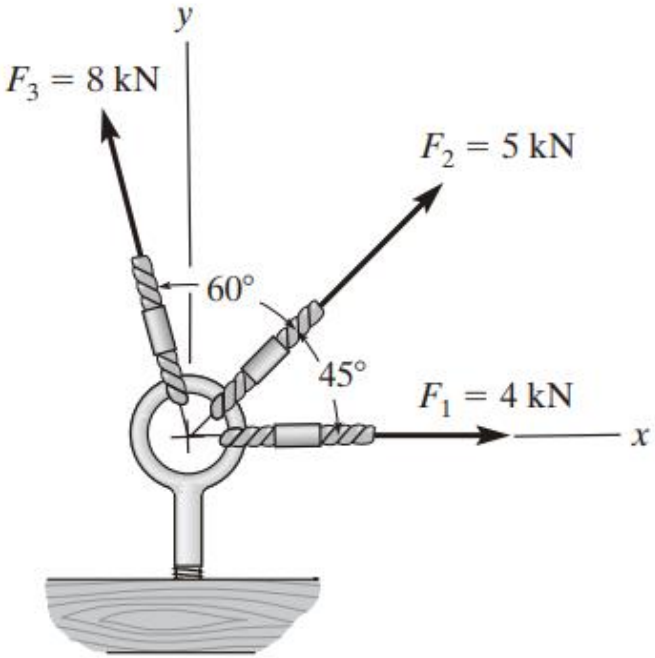
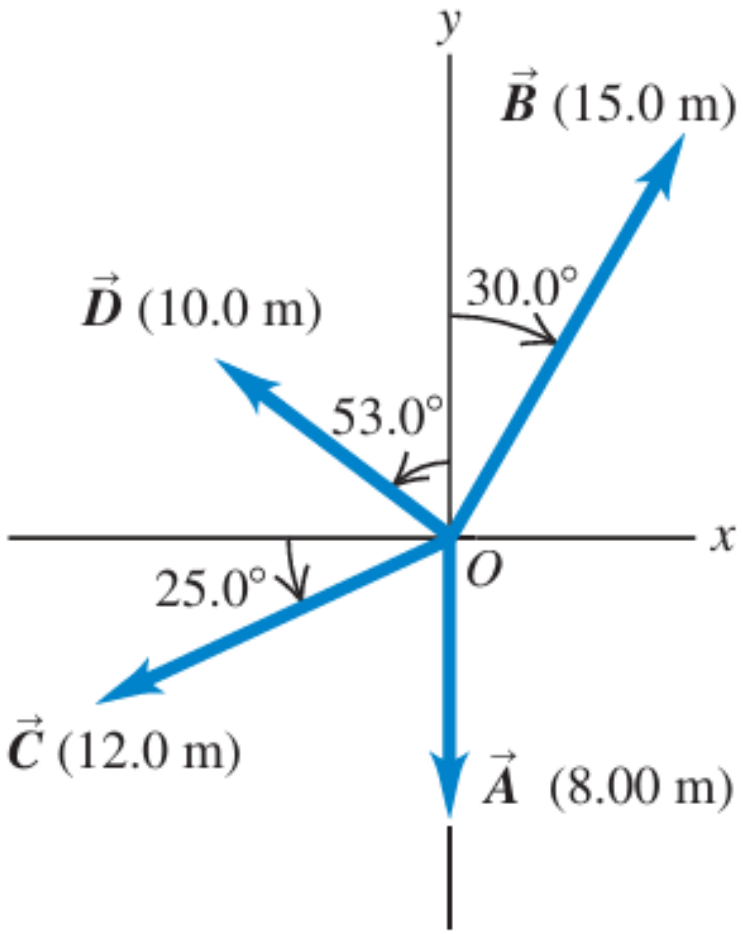


Figura 2

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

DESAFIO 2: (a) Determine sus componentes de los vectores, (b) Escriba los vectores en su forma vectorial, (c) determinar los vectores escritos en su forma vectorial o cartesiana, (d) determine la resultante y (e) Calcule la dirección de la resultante.



UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

Ejemplo 13: Se tienen los siguientes vectores

$\vec{P} = -5\hat{\imath} + 3\hat{k}$

$\vec{Q} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$

$\vec{R} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

Determine:

(a) $\vec{Q} + 3\vec{R}$

(b) $2\vec{P} - \vec{Q}$

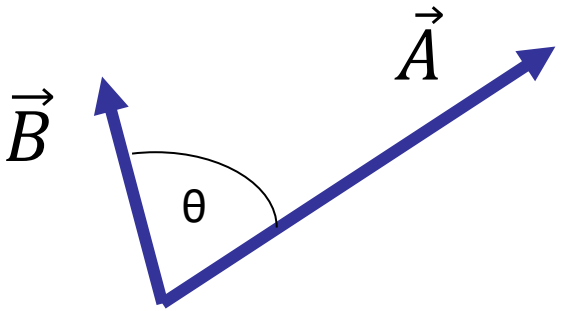
(c) $\left|\vec{P} - \vec{R}\right|$

(d) $\left|\vec{Q} - \vec{R}\right|$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES (•)

Producto escalar en coordenadas cartesianas



$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AB \cos\theta$$

EL RESULTADO ES UN NUMERO

❖ **El producto escalar cumple con propiedad conmutativa:**

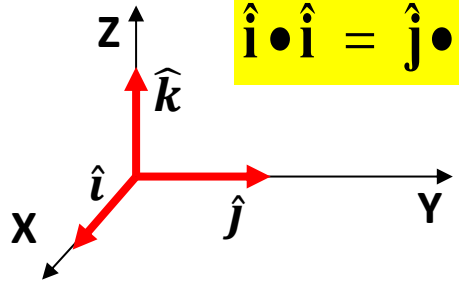
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$$

IMPLICANCIA DEL PRODUCTO ESCALAR:

$$\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

Producto escalar para vectores unitarios fundamentales



$$\hat{i} \bullet \hat{i} = \hat{j} \bullet \hat{j} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{i} = 0$$

Desarrollo del producto escalar

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

APLICACIÓN

Sirve para determinar ángulo entre dos vectores

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

Ejemplo 14: Se tienen los siguientes vectores

$\vec{P} = -5\hat{\imath}$

$\vec{Q} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$

$\vec{R} = -5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

Determine:

(a) $\vec{Q} \cdot \vec{R}$

(b) $\vec{P} \cdot \vec{Q}$

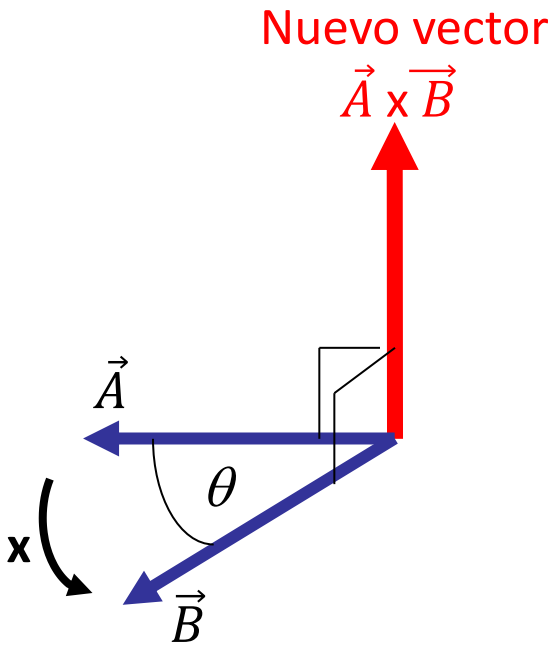
(c) $\vec{P} \cdot \vec{R}$

(d) Angulo entre los vectores $\vec{P}$ y $\vec{R}$

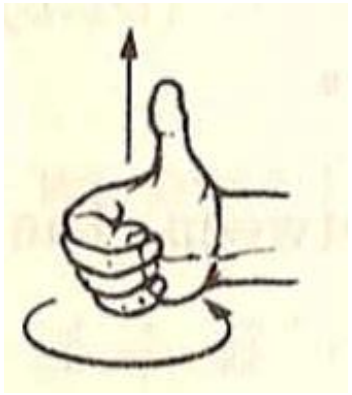
UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES (X)

El producto vectorial de dos vectores ($\vec{A}$ y $\vec{B}$) se realiza en sentido antihorario y el resultado es un nuevo vector perpendicular ($\vec{A}$ x $\vec{B}$)a los vectores que se multiplican.



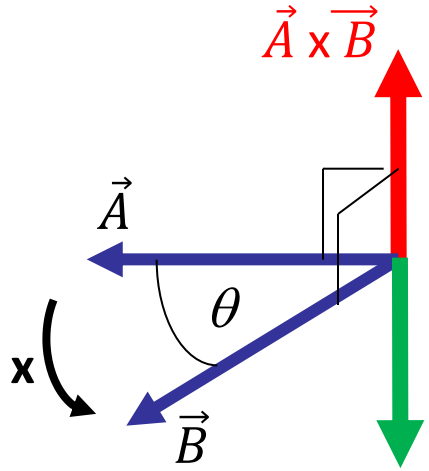
regla de la mano derecha



La magnitud o modulo del producto vectorial es:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\ sen\theta$$

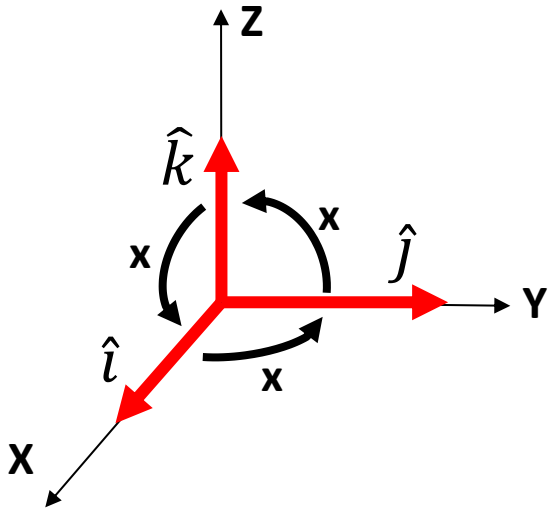
- **El producto vectorial No es conmutativo**



$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES UNITARIOS FUNDAMENTALES



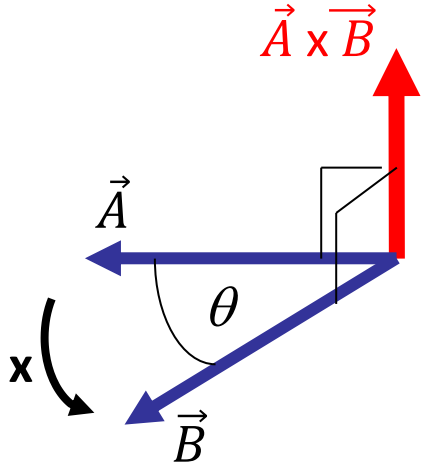
ANTIHORARIO $\hat{i}x\hat{j} = \hat{k};\ \hat{j}x\hat{k} = \hat{i};\ \hat{k}x\hat{i} = \hat{j}$

HORARIO $\hat{j}x\hat{i} = -\hat{k};\ \hat{k}x\hat{j} = -\hat{i};\ \hat{i}x\hat{k} = -\hat{j}$

VECTORES PARALELOS: $\vec{p} \parallel \vec{q} \ \rightarrow\ \vec{p}x\vec{q} = 0$

ENTONCES: $\hat{i}x\hat{i} = \hat{j}x\hat{j} = \hat{k}x\hat{k} = 0$

DESARROLLO DEL PRODUCTO VECTORIAL



$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

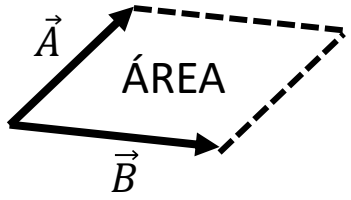
$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k}$$

APLICACIÓN

Sirve para determinar el área del paralelogramo formado por dos vectores



ÁREA= $|\vec{A}$ x $\vec{B}|$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

Ejemplo 15: Se tienen los siguientes vectores

$\vec{p} = -2\hat{\imath}$

$\vec{q} = 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 12\hat{k}$

$\vec{s} = 9\hat{\imath} + 6\hat{k}$

Determine:

(a) $\vec{p}$ X $\vec{q}$

(b) $\vec{p}$ X $\vec{s}$

(c) $\vec{q}$ X $\vec{s}$

UPAO
UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO